

# Algebra lineal

Tomeu Capó

## 1. Matrius

Una matriu és una disposició ordenada d'elements (números, funcions, etc ...) en files i columnes, tancada entre parèntesis, i que obeeix a certes regles o àlgebra. En la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

els nombres  $a_{ij}$  s'anomenen elements de la mateixa. L'element  $a_{ij}$  pertany a la fila  $i$  i a la columna  $j$ . Aquesta matriu consta de  $m$  files i  $n$  columnes i, per aixó, és d'ordre  $\ll m \times n \gg$  i s'anomena "matriu  $A$ ", o "matriu  $A$   $m \times n$ ", o bé "matriu  $m \times n$  [ $a_{ij}$ ]".

La condició necessària i suficient per a que dues matrius siguin iguals és que tinguin idèntics els seus elements corresponents; es a dir, una matriu ha d'esser copia exacta de l'altre per que siguin iguals.

## 2. Suma algebraica de matrius

Dues matrius del mateix ordre es poden sumar o restar, es a dir, son conformes respecte de la suma algebraica. La suma (resta) de dues matrius  $m \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  i  $B = [b_{ij}]$  és una altre matriu  $C$  tal que els seus elements són la suma (resta) dels corresponents de  $A$  i  $B$ . Per tant,  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$ .

**Exemple 1:** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , la suma serà:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

i la diferència:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3. Producte de matrius

El producte  $A B$ , en aquest sentit, d'una matriu  $A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \cdots \ a_{1m})$  d'ordre  $1 \times m$ , per un altre

matriu  $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$  d'ordre  $m \times 1$ , es un altre matriu  $C$  d'ordre  $1 \times 1$ :

$$\mathbf{C} = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1m}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}) = \left[ \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} \right]$$

Com podem observar cada element de la fila s'ha multiplicat per el corresponent de la columna sumant a continuació els productes obtinguts. El producte de matrius es fa sempre multiplicant files per columnes.

**Exemple 2:**

$$(1 \ 3 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = [1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)] = 4$$

El producte **A B**, en aquest sentit, d'una matriu  $A = [a_{ij}]$  d'ordre  $m \times s$ , per un altre matriu  $B = [b_{ij}]$  d'ordre  $s \times n$ , dona un altre matriu  $C = [c_{ij}]$  d'ordre  $m \times n$ , sent:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

**Exemple 3:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

**Exemple 4:**

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{pmatrix}$$

**Exemple 5:**

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 8 + (-3) \cdot 7 & 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 & 5 \cdot 6 + (-3) \cdot 9 \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 6 + 2 \cdot 9 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{pmatrix}$$

Les matrius anteriors  $A$  i  $B$  s'anomenen conformes respecte del producte, es a dir, per a que existeixi el producte **AB** és imprescindible que el número de files de  $B$  sigui igual al número de columnes de  $A$ . Aleshores, si  $A$  és una matriu  $3 \times 2$  i  $B$  és una matriu  $2 \times 5$  existeix el producte **AB**, però no existeix **BA**. Anàlogament, si  $D$  és una matriu  $3 \times 3$  i  $E$  és  $3 \times 3$  existeixen ambdós productes, **AB** i **BA**.

#### 4. Inversió

En una ordenació qualsevol de números naturals existeix una inversió quan un número precedeix a un altre menor que ell.

Per exemple, en l'ordenació 123, el 3 precedeix al 2; per tant, existeix una inversió. En 321, el 3 precedeix al 2 i al 1, i el 2 precedeix al 1; hi ha, llavors tres inversions. En 4213, el 4 precedeix al 2, al 1 i al 3, i el 2 precedeix al 1; la ordenació té 4 inversions. En 3421, el 3 precedeix al 2 i al 1, el 4 precedeix al 2 i al 1 i el 2 precedeix al 1; la ordenació té 5 inversions.

#### 5. Determinant d'una matriu quadrada

Considerem una matriu quadrada de ordre  $n$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i formem tots els productes de la forma  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ , de manera que sols existeixqui en ells un element de cada fila i un altre de cada columna. Observis que en l'ordre del primer subíndex és, per conveniència,  $1, 2, \dots, n$ , raó per la qual l'ordre  $j_1, j_2, \dots, j_n$  del segon subíndex serà una de les  $n!$  permutacions del nombres  $1, 2, \dots, n$ . A més, associam un signe, + o -, a cada producte, segons el nombre de inversions de la permutació dels segons subíndex sigui parell o imparell, repectivament.

En aquestes condicions, el determinant d'una matriu quadrada  $A$  d'ordre  $n$ , que s'escriu  $|A|$ , és el polinòmi que resulta al sumar els  $n!$  productes distints, cadascun amb el seu signe, que es poren formar amb els elements de  $A$ . El determinant d'una matriu quadrada d'ordre  $n$  s'anomena determinant d'ordre  $n$ .

**Exemple 6:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

**Exemple 7:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

**6. Menor complementari i adjunt d'un element**

El menor complementari d'un element  $a_{ij}$  d'un determinant d'ordre  $n$  és el determinant d'ordre  $(n - 1)$ , que s'obté suprimint la fila  $i$  i la columna  $j$  a la que pertany l'element. El menor complementari d'un element  $a_{ij}$  ho escriurem de la següent forma  $|M_{ij}|$ . El menor complementari amb el seu signe,  $(-1)^{i+j} |M_{ij}|$ , s'anomena adjunt de  $a_{ij}$  i s'escriu  $\Delta_{ij}$ .

**Exemple 8:** En el determinant de tercer ordre  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ,

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ i } \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**7. Desenvolupament d'un determinant pels elements d'una línia**

El valor d'un determinant  $|A|$  d'ordre  $n$  és la suma algebraica dels  $n$  productes que s'obtenen multipllicant cada element d'una línia qualsevol (fila o columna) per el seu adjunt corresponent. Es a dir,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \Delta_{12} + a_{22} \Delta_{22} + a_{32} \Delta_{32} \\ &= - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

és el desenvolupament de  $|A|$  pels elements de la segona columna.

**Exemple 9:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 3 [4(-6) - 7(1)] - 5 [1(-6) - 7(2)] + 0 = 7$$

**Exemple 10:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 [1(3) - 2(4)] = 25$$

**Exemple 11:**

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 5 [4(-3) - 2(8)] = 20$$

**8. Propietats dels determinants**

1. Si un determinant té dues línies iguals, aleshores és nul. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Multiplicant els elements d'una línia per un nombre  $k$ , el determinant queda multiplicat per  $k$ . Per exemple,

$$2 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

3. Permutant dues línies d'un determinant, aquest canvia de signe. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Si cada element d'una línia és suma de dos o més nombres, el determinant es pot expressar mitjançant la suma de dos o més determinants. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Si als elements d'una línia se l'hi afageixen els d'un altre multiplicats per una constant  $k$ , el valor del determinant no varia. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+3(-3) & -3 \\ 4 & 6+3(-2) & -2 \\ -3 & 1+3(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

### 9. Solució dels sistemes d'equacions lineals per determinants: Regla de Cramer

El sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites  $x_1, x_2, x_3$ ,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

es pot escriure de la forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Si multiplicam cada element de la primera columna per  $x_1$ , el valor numèric del determinant dels coeficients  $\Delta_a$  queda multiplicat per  $x_1$  (Per la propietat 2).

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sumem a cada element de la primera columna l'element corresponent de la segona multiplicat per  $x_2$ , i el de la tercera multiplicat per  $x_3$  (Propietat 5). Llavors,

$$x_1 \Delta_a = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

o bé

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

sempre que  $\Delta_a \neq 0$ . Anàlogament,

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_a} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_a}$$

Aquest mètode de resolució s'anomena *Regla de Cramer* i es pot aplicar a qualsevol sistema de  $n$  equacions lineals amb  $n$  incògnites sempre que el determinant dels coeficients sigui diferent de zero.