

Corrent Altern II

Tomeu Capó i Capó

23 de juny de 2002

1 Circuits sèrie RLC

1.1 Caigudes de tensió en el circuit sèrie RLC

En un circuit sèrie RLC, com el del l'esquema que hi ha abaix, que presenti al mateix temps autoinducció i capacitat en sèrie, els efectes produïts per la capacitat i l'autoinducció son oposades. L'autoinducció produeix un desfase de la corrent en retràs, i la capacitat el produeix en adelantament.

Per l'anàlisi de les caigudes de tensió i de la intensitat i tensió resultant o aplicada al circuit RLC del dibuix d'abaix, procedim de la següent manera:

Si la tensió u_{ab} que aplicam al circuit és altern sinusoidal i circula una corrent de intensitat $i = I_{max} * \sin \omega t$, les caigudes de tensió en cada element R, L, C són:

$$u_R = R * i = R * I_{max} * \sin \omega t$$

$$u_L = L * \frac{d}{dt} * (I_{max} * \sin \omega t) = \omega * L * I_{max} * \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \omega * L * I_{max} * \cos \omega t$$

$$u_C = \frac{1}{C} * \int I_{max} * \sin \omega t * dt = \frac{1}{\omega * C} * I_{max} * \sin \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\omega * C} * I_{max} * (-\cos \omega t)$$

La tensió total del circuit u_{ab} , com tot circuit sèrie, és sumen tots els voltatges particulars de cada component:

$$u_{ab} = u_R + u_L + u_C = R * I_{max} * \sin \omega t + \left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C} \right) * I_{max} * \cos \omega t$$

També podem expressar u_{ab} a través d'una funció sinus d'amplitud A i un angle de fase φ :

$$u_{ab} = A * \sin(\omega t + \varphi) = A * \sin \omega t * \cos \varphi + A * \cos \omega t * \varphi$$

Igualant els coeficients de $\sin \omega t$ en les dues equacions anteriors:

$$R * I_{max} = A * \cos \varphi$$

$$\left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right) * I_{max} = A * \sin \varphi$$

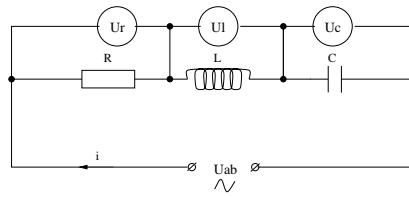
Elevant al quadrat i sumant membre a membre:

$$A^2 = (R * I_{max})^2 + \left[\left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right) * I_{max}\right]^2 ;$$

$$A = I_{max} * \sqrt{R^2 + \left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right)^2}$$

Per altre banda tenim el càlcul de l'angle φ o angle de desfase, per trigonometria:

$$\tan \varphi = \frac{\omega * L - \frac{1}{\omega * C}}{R}; \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right)^2}}$$



1.2 Generalització de la llei de Joule

La relació entre valors instantànis de la tensió sinusoidal aplicada a un circuit de característiques lineals i la intensitat que produeix, l'hem generalitzada, això seria pascut amb el que varem fer amb la llei d'Ohm amb el corrent altern.

Els valors instantanis de l'energia són infinitèsims de primer ordre, per ser-ho el temps de integració. Només podem obtenir valors finits si cercam valors mitjos durant un cert temps. Aquest valors, extesos a un temps indefinit exacte del període, ens dona com a resultat:

$$P = U * I * \cos \varphi = U * I * \frac{R}{Z} = I^2 * R$$

Per tant només basta amb integrar el primer sumant de la equació per obtenir la mateixa P_R :

$$P_R = \frac{1}{T} * \int_0^T R_i^2 dt = \frac{I_{max}^2 * R}{2T} * \int_0^T dt(1 - \cos 2\omega t) = I^2 * R$$

Però amb la llei d'Ohm en corrent altern, també hem extes aquest concepte a la potència reactiva. D'aquesta forma, en un circuit pasiu RLC como el que tenim ara, la potència reactiva val:

$$P_r = U * I * \sin \varphi = \frac{U * I}{Z} * X = I^2 * X$$

Com abans havíem vist, hi ha una fórmula per a treure la Potència Aparent, que resulta:

$$P_{apa} = \sqrt{P_a^2 + P_r^2} = \sqrt{I^4 * (R^2 + X^2)}$$

1.3 Impedància i triangle de impedàncies

Per la llei d'Ohm en corrent altern, sabem que la relació entre la tensió e intensitat, la anomenam impedància. En el nostre cas concret d'un circuit sèrie RLC, demostram que la impedància val:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right)^2}$$

També o podem expressar, sabent que:

$$X_L = \omega * L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega * C}$$

Respectivament, per la que queda:

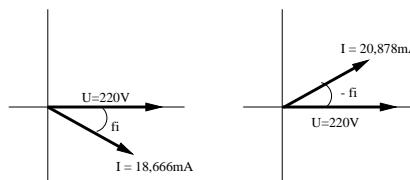
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

1.4 Intensitat Eficaç. Diagrama vectorial

Ara ens interessa el valor eficaç de la intensitatde corrent, que per la llei d'Ohm i en funció de dues equacions anteriors:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega * L - \frac{1}{\omega * C}\right)^2}}$$

Per exemple, nosaltres podem dibuixar el diagrama vectorial de tensió e intensitat com:



1.5 Potències. Triangle de potències

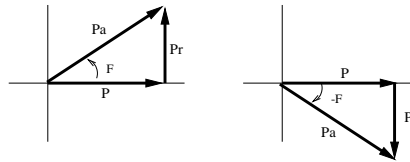
Per les lleis d'Ohm i Joule en corrent altern, ja coneixem el valor de les potències: aparent, reactiva i activa. El triangle de potències s'obté multiplicant per I^2 el triangle de impedàncies. Si operam amb valors eficaços i amb les magnituds escalars que representen els costats del triangle de potències, les fórmules que podriem treure de tot això serien:

$$\text{Potència activa: } P = R * I^2 = \frac{U^2}{R} = U * I * \cos \varphi = (W)$$

$$\text{Potència reactiva: } P_r = X * I^2 = \frac{U_X^2}{X} = U * I * \sin \varphi = (VA_r)$$

$$\text{Potència aparent: } P_{apa} = Z * I^2 = \frac{U^2}{Z} = U * I = (VA)$$

Es d'observar que la U es refereix a la tensió total eficaç i les $U_R - U_X$ a les que existeixen en bornes de R i $L - C$, respectivament.



1.6 Solució de problemes mitjançant el càlcul vectorial simbòlic

La solució analítica s'aconsegueix per mèdi del càlcul complex o vectorial simbòlic, el qual va tenir el seu precursor, fou l'enginyer electrònic Oliver Heaviside. Aquest va idear noves formes d'anàlisi matemàtic a través del seu càlcul operacional per a resoldre determinats problemes d'Electrònica.

En el nostre cas treballam en vectors, però les propietats físiques que medeixen o representen manquen de caràcter vector. Tal és el cas de la tensió e intensitat i , sobre tot, de la potència e impedància, que son magnituds físiques escalars.

Sigui l'impedància complexa Z , a la que s'aplica una tensió una tensió sinusoidal u , i per la que circula una intensitat i . La expressió instantània de les dues, agafant com a referència la senoide natural de la tensió, sabem que:

$$u = U_{max} * \sin \omega t$$

$$i = I_{max} * \sin(\omega t - \varphi)$$

Els vectors representatius de les dues en la seva notació exponencial i mòdul argumental

$$\vec{U} = U * e^{j0} = U_{\angle 0}$$

$$\vec{I} = I * e^{-j\varphi} = I_{\angle -\varphi}$$

Per la llei d'Ohm, la relació U/I és la impedància, que en notació complexa té per expressió:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = \frac{U * e^{j0}}{I * e^{-j\varphi}} = \frac{U_{\angle 0}}{I_{\angle -\varphi}} = Z * e^{+j\varphi}$$

La impedància complexa de la equació anterior expresada en forma trigonomètrica, ens condueix a la forma binòmica que representa la seves projeccions damunt els eixos cartesianes, es a dir, les ja conegudes R i X .

$$Z = Z * (\cos \varphi + j * \sin \varphi) = R + j X_L \Omega$$

A aquestes expressions s'arriba exactament igual, si s'aplica un altre origen de temps o angle de fase inicial ψ , be, les posicions relatives dels vectors giratoris no varien amb el temps. El que serveix d'exemple es el de les potències:

Les expressions vectorials de la tensió i intensitat anteriors, agafant com a referència el vector tensió i un origen de temps ψ qualsevol:

$$\vec{U} = U * e^{j\psi}$$

$$\vec{I} = I * e^{j(\psi-\varphi)}$$

El producte de tensió per l'intensitat segons la llei d'Ohm, ens dona la potència, per que l'expressió matemàtica correspongui amb la naturalesa inductiva o capacitiva da la potència, hem de multiplicar la tensió per la conjugada de l'intensitat, és a dir:

$$\vec{P}_{ap} = \vec{U} * \vec{I}^* = U * e^{j\psi} * I * e^{j(-\psi+\varphi)} = S * e^{+j\varphi} = S_{L+\varphi}$$

També es pot expressar de forma trigonomètrica:

$$\vec{P}_{ap} = P_{ap} * (\cos \varphi + j * \sin \varphi) = P_a + j * P_r$$

1.7 Resonància sèrie

En tot circüit de corrent altern sempre hem alimentat amb una freqüència constant. El circüit RLC depen dels valors relatius de $\omega * L$ i de $\omega * C$, aquest són fixes per un valor determinat de freqüència. Si variam la freqüència de alimentació del circüit sèrie RLC fins fer que coincidir el valor de les reactàncies inductiva y capacitiva, el factor de potència sirà l'unitat, el circuit absorbirà la màxima intensitat i entrarà en l'estat resonant.

La freqüència que ens produeix aquest estat resonant sèrie la anomenam freqüència de resonancia, i te per valor:

$$X_L = X_C$$

$$\omega * L = \frac{1}{\omega * C}$$

$$2 * \pi * f * L = \frac{1}{2 * \pi * f * C}$$

$$(2 * \pi * f)^2 * L * C = 1$$

$$f^2 = \frac{1}{2^2 * \pi^2 * L * C}$$

de on la freqüència de resonancia, que designarem com a f_r , te per expressió:

$$f_r = \frac{1}{2 * \pi * \sqrt{L * C}} = Hz$$

