Corrent altern

23 de juny de 2002

1 Producció d'una corrent alterna

Així com haviem vist anteriorment per a generar corrent altern amb un alternador construït per una bobina que girava a una velocitat angular ω, teniem que el fluxe era igual a:

$$\Phi = \beta * S * \cos\alpha$$

Si en lloc de tenir una espira en tenim N, i sense perdues, podriem obtenir l'expressió:

$$\Phi = N * \beta * S * \cos\omega t$$

Si derivam aquesta expressió i aplicam la llei de Faraday en la F.E.M. és la derivada del fluxe respècte al temps:

$$e = \frac{d\Phi}{dt}$$

Que queda:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = -N * \beta * S * \omega * \sin\omega t$$

D'aquesta expressió es dedueix les fórmules dels valors instantanis i màxims de la F.E.M. induida:

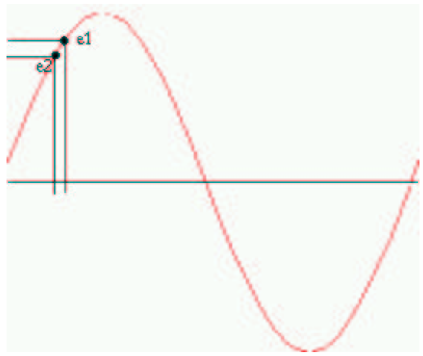
F.E.M. Instantanea: $e = -E_{max} * \sin\omega t$
F.E.M. Màxima: $E_{max} = N * \omega * \Phi_{max}$

1.1 Valors del corrent altern

Dins el corrent altern, quan els fan càlculs. Sempre es trobaran amb els distints valors eficaços, instantànis, de pico, etc ...

1.1.1 Valor instantàni

D'una ona sinusoidal és el que agafa la ordenada en un instant determinat.



O podem expresar com:

$$e = E_{max} * \sin \omega t$$

1.1.2 Valor màxim

Direm que el valor màxim de pico o de cresta d'una magnitut variable sinusoidal amb el temps.

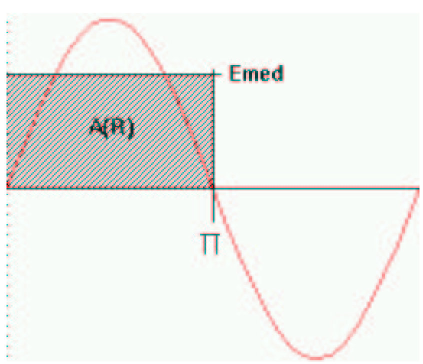
1.1.3 Valor de pico

Direm que el valor de pico és defineix com a dues vegades el valor màxim:

$$E_{pp} = 2 * E_{max}$$

1.1.4 Valor mitx

Es defineix com la mitja algebràica dels valors instantanis durant un sert període.



$$E_{med} = \frac{2}{\pi} * E_{max}$$

Podem deduir la formula a travers de la area que hi ha en el dibuix:

$$A = \int_0^{T/2} E_{max * \sin(\omega t) * dt}$$

$$E_{med} = \frac{A}{T/2}$$

$$E_{med} = \int_0^{T/2} E_{max} * \sin(\omega t) * dt = \frac{2}{T} * \frac{E_{max}}{\omega} \left[- \cos \omega t \right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{2}{T} * \frac{E_{max}}{\omega} * \left[- ((-1) - (+1)) \right] = \frac{4 * E_{max}}{T * \omega} = \frac{4 * E_{max}}{T * \frac{2 * \pi}{T}} = \frac{2}{\pi} * E_{max}$$

1.1.5 Valor eficaç

El valor eficaç es podria definir com la arrel cuadrada de la mitja dels cuadrats dels valors instantanis, agafats durant un periode o un cicle.

$$E = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}}$$

Aquesta fórmula es dedueix de, fer el càlcul de les arees de la funció sinusoidal d'un cicle, que vendria a ser una suma de tots els valors instantanis:

$$\int_0^T e^2 * dt = \int_0^T (E_{max} * \sin \omega t)^2 * dt = \int_0^T E_{max}^2 * \sin^2 \omega t * dt =$$

$$\int_0^{2\pi} E_{max}^2 * \sin^2 \alpha * d\alpha = \int_0^{2\pi} E_{max}^2 * \frac{1}{2} * (1 - \cos 2\alpha) * d\alpha =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{E_{max}^2}{2} d\alpha - \int_0^{2\pi} \frac{E_{max}^2}{2} \cos 2\alpha * d\alpha = \frac{E_{max}^2}{2} (2\pi - 0) - \frac{E_{max}^2}{2} * \left[\frac{1}{2} * \sin 2\alpha \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{E_{max}^2}{2} (2\pi - 0) = E_{max}^2 * \pi$$

Com a la definició diu:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}$$

Substituim:

$$E = \sqrt{\frac{1}{2\pi} * E_{max}^2 * \pi} = \sqrt{\frac{E_{max}^2}{2}} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}}$$

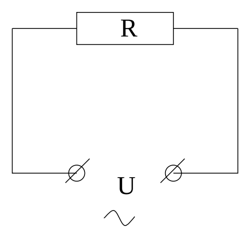
2 Paràmetres RLC (Llei d'Ohm en C.A.)

2.1 Resistència en C.A.

Ja sabem que la resistència és una magnitut mesurable. L'ofereix el conductor al desplaçar-se per el seu interior una intensitat elèctrica no canviant, sense tenir en conte els seus efèctes electromagnètics ni la inducció de F.E.M. en el conductor deguda a camps magnètics externs.

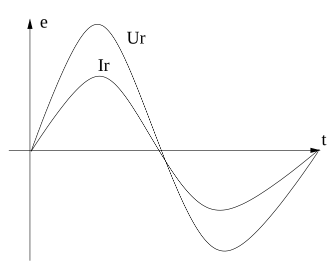
2.2 Circuit resistiu pur - Efècte de la freqüència i relació entre tensió e intensitat

Direm circuit resistiu pur aquell circuit el qual te uns elements passius que tenen només resistència ohmica. Circuit amb paràmetre R.



Si a aquest circuit s'aplica una tensió alterna sinusoidal de la forma $u_g = U_{max} * \sin \omega t$, en cada instant ens produeix una corrent altèrna sinusoidal que va en fase amb la tensió. Per tant:

$$I_r = I_{max} * \sin \omega t$$



2.2.1 Resistència en C.A. d'un circuit resistiu pur

La relació que existeix en tot instant entre la F.E.M. alterna sinusoidal i la intensistat que produeix és una constant que, com sabem, li deim resistència R:

$$R = \frac{u_r}{I_r} = \frac{U_{max} * \sin(\omega t + \varphi)}{I_{max} * \sin(\omega t + \varphi)} = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

En un circuit resistiu pur, la intensitat és només limitada per la resistència ohmica i la freqüència no influeix per a retardar o adelantar la intensitat, ja que em vist que estan en fase la ona de la tensió aplicada i la intensitat que produeix.

2.2.2 Potència en C.A. d'un circuit resistiu pur

Si en contes de dividir la U_r amb la I_r les multiplicam obtindrem l'expressió de la potència activa instantanea i els valors mitjos i màxims de la mateixa, que corresponen a la representació cartesiana:

- Demostració:

$$\left.\begin{array}{r} u_r = U_{max} * \sin\omega t = U_{max} * \sin\alpha \\ i_r = I_{max} * \sin\omega t = I_{max} * \sin\alpha \end{array}\right\}$$

En un circuit resistiu la tensió e intensitat estan en fase, i el valor instantani de la potència

$$p = u_r * i_r$$

$$p = U_{max} * \sin\alpha * I_{max} * \sin\alpha = U_{max} * I_{max} * \sin^2\alpha$$

$$p = U_{max} * I_{max}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) = 2U * I * \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)$$

Al primer terme de l'ecuació potència mitja:

$$\frac{2U * I}{2} = U * I = \frac{U_{max} * I_{max}}{2} = P_m$$

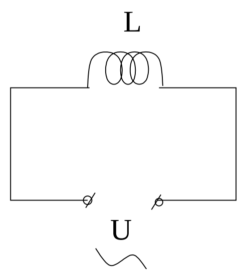
Al valor $2U * I = P_m$, ja que correspon a $\cos 2\omega = -1, \alpha = \pi/2$, que coincideix amb el punt de màxima potència. Així tendrem:

$$P_m = U * I = P_{max}/2$$

$$P_{max} = 2U * I = U_{max} * I_{max}$$

2.3 Circuit inductiu pur. Efècte de la freqüència i relació entre tensió e intensitat

Un circuit inductiu pur correspon a una bobina o devanat en el que la seva resistència òhmica és nula. Inductància pura:



En realitat, per aconseguir una inductància de certa magnitut (decenes o centenes en mH) hem de arrollar bastant longitut de fil esmaltat amb el que la resistència és de uns centenars de ohms. Ara be, en tot circuit per el circula una intensitat (i) es crea un camp magnètic que varia quan varia la corrent. En consequència, en tot circuit per el que circula una intensitat variable ($i = I_{max} * \sin \omega t$) s'indueix una F.E.M. ($e_L$) a causa de la variació del seu propi camp ($d\Phi/dt$). A aquesta F.E.M. la anomenam força electromotriu autoinduída, e_L. Segons la llei de Faraday-Lenz, sabem que aquesta F.E.M. la denotam com a:

$$e_L = -N * \frac{d\Phi}{dt} = -L * \frac{di}{dt}$$

Quan el circuit inductiu pur se conecta a un generador o a la xarxa d'alimentació, la tensió en bornes de la red U_{ab} , força a la intensitat que es produeix i_{ab} en contra de la F.E.M. induida per e_L per el canvi de fluxe. D'aquesta forma la tensió de la xarxa es consumeix en una caiguda de tensió igual en magnitut, però de signe contrari de la F.E.M. induida.

$U_{ab} + e_L = 0$; Llei de tensions de Kirchhoff

$$U_{ab} + \left(-L * \frac{di}{dt}\right) = 0$$

$$U_{ab} = L * \frac{di}{dt}$$

Sustituint el valor instantani de la intensitat i derivant com sabem que:

$$\frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t$$

$$U_{ab} = L * I_{max} * \omega * \cos \omega t$$

Com que el cosinus de ωtés igual a $\sin(\omega t + \pi/2)$ la expressió quedarà:

$$U_{ab} = L * \omega * I_{max} * \sin(\omega t + \pi/2)$$

La tensió U_{ab}, de la xarxa o en bornes de la bobina pura, va adelantada 90 graus, amb respècte a la intensitat que produeix la bobina. Es a dir l'equació confirma que la inductància pura retrasa 90 graus a la intensitat amb respècte a la tensió.

2.3.1 Efècte de la freqüència. Reactància inductiva

La inductància d'un circuit serveix per a retardar l'aument o disminució de la corrent, però en cap dels casos preveu ni limita el canvi. Ara bé, la freqüència limita l'amplitut de la corrent en un valor igual a $\omega L = 2 * \pi * f * L$ ohms. Aquest valor ωL l'anomenam reactància inductiva X_L, que creix al aumentar la freqüència i disminuir si també ho fa la freqüència. D'aqui que en corrent continua, com a la $f = 0$Hz, el valor de la reactància sigui zero.

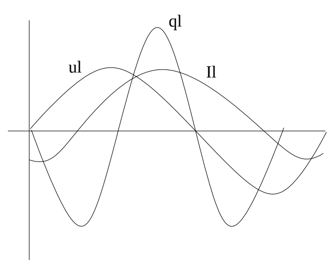
De la equació anterior de la U_{ab} i per els valors eficaços deduim:

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \omega * L = 2 * \pi * f * L$$

En la equació la reactància inductiva són ohms, si la freqüència es dona en Herz's (Hz) i l'autoinducció en henris H.

2.3.2 Potència d'una reactància inductiva

Per al circuit inductiu pur anterior, ja coneixem l'expressió algebràica que ens dona el valor instantani de la tensió aplicada U_{ab} i el de la intensitat que circula i_{ab}. Multiplicant U_{ab} per i_{ab} obtindrem en tot instant el valor de la potència inductiva q_L.



$$i_L = I_{max} * \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$q_L = U_{max} * I_{max} * \sin \omega t * \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$q_L = -U_{max} * I_{max} * \sin \omega t * \cos \omega t$$

$$q_L = -\frac{U_{max} * I_{max}}{2} * \sin 2\omega t$$

El valor eficaç el designam com a Q_L, i val $U_L * I_L$, o expresat en funció de la reactància inductiva:

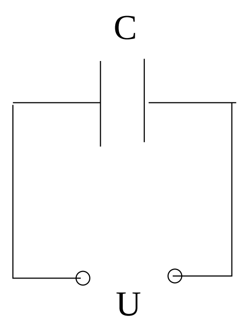
$$Q_L = X_L * I_{L2} = \frac{U_L^2}{X_L}$$

Això dona la potència reactiva en (VAr).

2.4 Circuit capacitiu pur. Efècte de la freqüència i relació entre la tensió e intensitat.

Un circuit capacitiu pur és aquell el cual la seva resistència ohmica és zero. Capacitància pura. Per les lleis del camp elèctric sabem que la tensió entre plaques d'un condensador és proporcional a la carrega emagatzamada i que la relació (Q/V) és la capacitat:

$$Q = C * U$$



Si aquest circuit li aplicam una corrent alterna de la forma $U_{ab} = U_{max} * \sin \omega t$, i la substituim en la equació $i = C * \frac{du}{dt}$:

$$i = C * \frac{d(U_{max} * \sin \omega t)}{dt} = \omega * C * U_{max} * \cos \omega t =$$

$$= \frac{U_{max}}{1/\omega * C} * \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Per suposat:

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{1/\omega * C} = U_{max} * \omega * C$$

Això el que ens indica l'adalantament de 90 graus de la intensitat respècte a la tensió que es produeix.

2.4.1 Efècte de la freqüència. Reactància capacitiva

La capacitat d'un circuit serveix per a retardar l'aument o disminució de la tensió, peró en cap cas preveu ni limita el canvi. Ara bé, la freqüència limita l'amplitut de la corrent en un valor igual a $1/\omega * C$ l'anomenarem reactància capacitiva X_C, que creix al disminuir la freqüència i disminueix si creix la freqüència. D'aqui podem treure una equació:

$$X_c = \frac{U_c}{I_c} = \frac{1}{\omega * C} = \Omega$$

$$\omega = 2 * \pi * f$$

2.4.2 Potència en un circuit capacitiu pur

Si en tot instant multiplicam el valor de la tensió u_c, per el de la intesitat i_c, l'expressió i representació de la potència és:

$$u_c = U_{max} * \sin \omega t$$

$$i_c = I_{max} * \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$q_c = U_{max} * I_{max} * \sin \omega t * \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$q_c = U_{max} * I_{max} * \sin \omega t * \cos \omega t$$

Bé, resumint i despejant quedaria:

$$q_c = \frac{U_{max} * I_{max}}{2} * \sin 2\omega t$$

2.5 Llei d'Ohm generalitzada per al corrent altern

Fins ara només em vist la llei d'Ohm a circuits de corrent continua. Pues ara hanem aplicar-la a la corrent alterna. Ara bé els receptors reals en corrent altern estan formats per un o més circuits purs, paràmetres (RLC). Es a dir són de naturalesa resistiva-inductiva, resistiva-capacitiva.

A tots ells s'els hi aplica una tensió alterna sinusoidal que, en règim permanent, els fa circular una intensitat de corrent altern. Igualment en tots ells es verifica la llei d'Ohm generalitzada per a el corrent altern, la qual te una expresió com aquesta:

$$\overrightarrow{Z} = \frac{\overrightarrow{U}}{\overrightarrow{I}}$$

La impedància $(\overrightarrow{Z})$ es calcula vectorialment com un nombre complexe:

$$\overrightarrow{Z} = \frac{U_{e^{j(\omega t+\psi)}}}{I_{e^{j(\omega t+\psi-\varphi)}}} = \frac{U}{I} * e^{+j\varphi} = Z * e^{+j\varphi}\Omega$$

La impedància $\overrightarrow{Z}$ expresada en forma exponencial trigonomètrica i binòmica és:

$$\overrightarrow{Z} = Z(\cos\varphi + \sin\varphi) = R + jX$$

La part real del nombre complèxe $\overrightarrow{Z}$ és la resistència:

$$R = Z * \cos\varphi$$

també:

$$R = \sqrt{Z^2 - X^2}$$

o:

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}$$

També per el triangle de impedància se multiplica per I^2, lo que obtenim el seu corresponent triangle de potències:

Potència Activa: $P = R * I^2$=(W)
Potència Reactiva: $P_r = X * I^2$=(VAr)
Potència Aparent: $P_{apa} = Z * I^2$=(VA)

o també:

$$Pr = U * I * \sin\varphi$$

$$P = U * I * \cos\varphi$$